03. Introducción a los circuitos lógicos

1. LÓGICA DE PROPOSICIONES

La lógica es la parte de la filosofía y de las matemáticas que estudia el razonamiento humano; es decir, el valor de verdad de las proposiciones y de las deducciones.

PROPOSICIÓN

Se llama proposición a cualquier enunciado del que podemos decir si es verdadero o falso.

Por lo tanto, desde la lógica, el valor de una proposición sólo tiene dos posibilidades: verdadero o falso; que simbólicamente representamos por 1 y 0 y electrónicamente por cerrado y abierto.

La lógica sólo estudia este aspecto de las proposiciones es decir su valor de verdad.

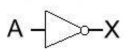
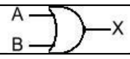
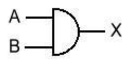
Ej: Serían proposiciones: ‘hoy es lunes’; ‘4 es múltiplo de 2’, ‘estamos en clase’.

CONECTORES U OPERADORES LÓGICOS

Son los operadores que usamos con las proposiciones; es decir, para construir nuevas proposiciones a partir de otras.

Los más importantes son: la negación lógica (no), la disyunción (o) y la conjunción (y).

Los símbolos que reciben según el contexto son:

Negación:	NOT	( )’	$\overline{\ }$	$\neg$	
Disyunción:	OR	+	$\cup$	$\vee$	
Conjunción:	AND	·	$\cap$	$\wedge$	

Ej: ‘**No** hay clase’; ‘el número es par **y** es cubo’; ‘el número es positivo **o** es nulo’

Tablas de verdad

Es una representación del valor de verdad de cada operación lógica o conector según el valor de sus variables proposicionales.

Ej: la tabla de verdad de la negación lógica es la siguiente:

A	B	A + B	A · B		A	A’
0	0	0	0		0	1
0	1	1	0		1	0
1	0	1	0			
1	1	1	1			

También podríamos ponerlo así:

+	0	1		·	0	1
0	0	1		0	0	0
1	1	1		1	0	1

Tautología

Se llama tautología a una proposición que siempre es verdadera. Siempre tiene el valor 1.

Ej: ‘el número es par o impar’ (estamos en el universo de los números naturales)

Contradicción

Se llama contradicción a una proposición que siempre es falsa. Siempre tiene el valor 0.

Ej: ‘$x^2 = -1$’ (x indica un número real). Otra posibilidad sería: ‘el número es par e impar’ (en el universo de los números naturales)

2. ÁLGEBRA DE BOOLE

Es la sistematización de la estructura de las proposiciones con sus operadores lógicos.

Por lo tanto, es un conjunto ▯ = {0,1} ; es decir, con dos elementos: 0 y 1. Estos se llaman constantes, representan el valor falso y verdadero. Se llama variable a cualquier símbolo que representa un elemento arbitrario del álgebra; es decir, una proposición. Las variables las representaremos con letras mayúsculas A, B, C,…

Con los operadores binarios: (·) y (+) y (’) que cumplen los axiomas siguientes:

Axioma: Principio de partida. No se demuestra.

Teorema: Deducción a partir de los axiomas (y teoremas).

AXIOMAS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

1.- PROPIEDAD CONMUTATIVA

A + B = B + A	A · B = B · A

Ej: ‘Múltiplo de 2 o múltiplo de 3’ es lo mismo que decir ‘Múltiplo de 3 o múltiplo de 2’

2.- PROPIEDAD ASOCIATIVA

(A + B) + C = A + (B + C)	(A · B) · C = A · (B · C)

Ej: ‘Múltiplo de 2 o de 3 o múltiplo de 5’ es lo mismo que decir: ‘Múltiplo de 2 o múltiplo de 3 o de 5’

3. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

A · (B + C) = A · B + A · C	A + (B · C) = (A + B) · (A + C)

Ej: ‘Múltiplo de 2 y múltiplo de 3 o de 5’ es lo mismo que decir: ‘multiplo de 2 y de 3 o múltiplo de 2 y de 5’

4. ELEMENTOS NEUTROS

A + 0 = A	A · 1 = A

Ej: ‘sube un piso **o** sube arriba’;

5. COMPLEMENTACIÓN (ley de tercio excluido)

Todo elemento A tiene un único complementario que cumple que:

A + A’ = 1	A · A’ = 0

Ej: ‘par o impar’ es siempre verdadero. ‘Está vivo **y** está muerto’ es siempre falso.

PRINCIPIO DE DUALIDAD

Cualquier teorema o identidad algebraica deducible de los postulados anteriores puede transformarse en un segundo teorema o identidad válida sin mas que intercambiar (+) por (·) y 1 por 0.

A + B = B + A	A · B = B · A
(A + B) + C = A + (B + C)	(A · B) · C = A · (B · C)
A · (B + C) = A · B + A · C	A + (B · C) = (A + B) · (A + C)
A + 0 = A	A · 1 = A
A + A’ = 1.	A · A’ = 0

TEOREMAS BÁSICOS

No se ponen demostraciones.

TEOREMA 1 (IDEMPOTENCIA)

Para cada elemento se verifica:

A + A = A	A · A = A

TEOREMA 2 (ACOTACIÓN)

Para cada elemento A se verifica:

A + 1 = 1	A · 0 = 0

TEOREMA 3 (INVOLUCIÓN)

Para cada elemento de ▯, se verifica:

(A')' = A

TEOREMA 4

Cada elemento identidad es el complemento del otro.

0' = 1	1' = 0

TEOREMA 5 (ABSORCIÓN)

Para cada par de elementos A y B, se verifica:

A + A · B = A	A · (A + B) = A

LEYES DE DE MORGAN

Para cada par de elementos A y B, se verifica:

(A + B)' = A' · B'	(A · B)' = A' + B'

Ej: Sea A = 'múltiplo de 2'; B = 'múltiplo de 3'

Lo contrario de 'múltiplo de 2 o múltiplo de 3' es 'no múltiplo de 2 y no múltiplo de 3'.

Lo contrario de 'múltiplo de 2 y de 3' es 'no múltiplo de 2 o no múltiplo de 3'

OPERADORES NO FUNDAMENTALES IMPLICACIÓN, XOR, XNOR.

Los operadores no fundamentales pueden expresarse a partir de los operadores fundamentales.

Implicación

Se lee 'si…entonces…'

Se representa A –> B

Su tabla de verdad es:

A	B	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ej: A = 'Si falta Ana'; B = 'Llámame'.

La implicación equivale a este elemento del Álgebra.

$A \rightarrow B = \overline{A} + B$

Sólo es falsa cuando siendo A verdadera, B es falsa.

XOR

$A \oplus B = \overline{A} \times B + \overline{B} \times A$

XOR se conoce como OR exclusiva.

Es verdadera sólo cuando una de las dos es verdadera y la otra falsa.

Su tabla de verdad es:

A	B	A⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

XNOR. Equivalencia

Es la negación de la XOR.
Es la doble implicación o equivalencia. '…si y sólo si…'
Se escribe así: A ↔ B. Se lee 'A es equivalente a B' o 'A si y sólo si B'
Su tabla de verdad es:

A	B	A↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

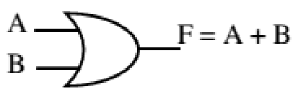
Ej. A = 'El triángulo a, b y c es rectángulo'; B = 'En el triángulo $c^2 = a^2 + b^2$'

A e $B = A \times B + \overline{A} \times \overline{B}$

Es verdadera cuando las dos son verdaderas o las dos son falsas.

3. PUERTAS LÓGICAS

PUERTA OR. FUNCIÓN OR

Tabla de verdad			Símbolo
A	B	A + B	
0	0	0	
0	1	1	
1	0	1	
1	1	1	

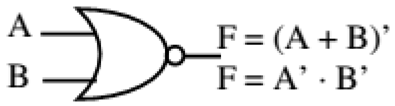
PUERTA AND. FUNCIÓN AND

Tabla de verdad			Símbolo
A	B	A · B	
0	0	0	
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	

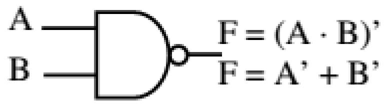
PUERTA NOT. FUNCIÓN NOT. INVERSOR

Tabla de verdad		Símbolo
A	A'	
0	1	
1	0	

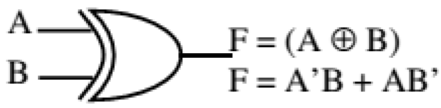
PUERTA NOR. FUNCIÓN NOR

Tabla de verdad			Símbolo
A	B	(A + B)’	
0	0	1	
0	1	0	
1	0	0	
1	1	0	

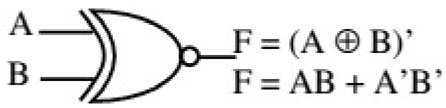
PUERTA NAND. FUNCIÓN NAND

Tabla de verdad			Símbolo
A	B	(A · B)’	
0	0	1	
0	1	1	
1	0	1	
1	1	0	

PUERTA XOR. FUNCIÓN XOR

Tabla de verdad			Símbolo
A	B	(A⊕B)	
0	0	0	
0	1	1	
1	0	1	
1	1	0	

PUERTA XNOR. FUNCIÓN XNOR

Tabla de verdad			Símbolo
A	B	(A⊕B)’	
0	0	1	
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	

Conjunto de puertas completo

Un CONJUNTO DE PUERTAS COMPLETO es aquel con el que se puede implementar cualquier función lógica.

Son conjuntos completos (uno por línea):

Puertas AND, OR y NOT.

Puertas AND y NOT.

Puertas OR y NOT.

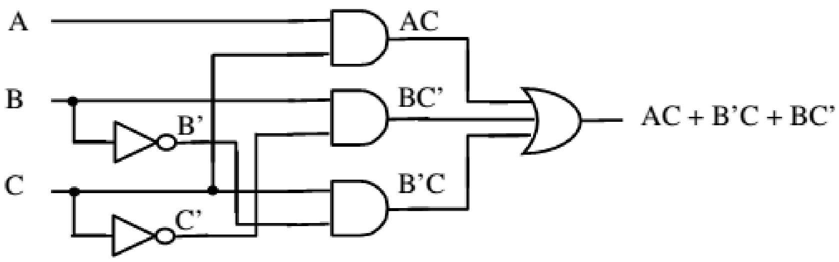
Puertas NAND.

Puertas NOR.

Implementación de funciones booleanas mediante conjuntos completos

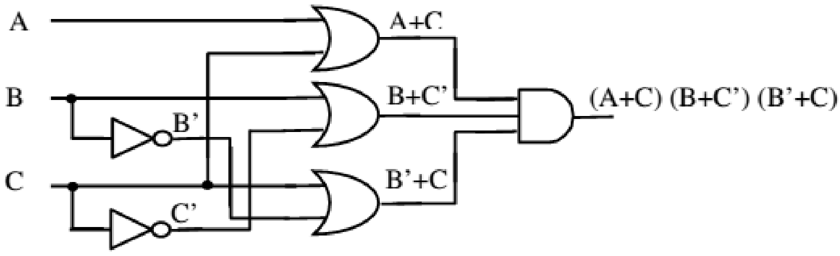
<u>NOT-AND-OR</u>

Ejemplo 1: F(A,B,C) = AC + B’C + BC



NOT-OR-AND

Ejemplo 2: F(A,B,C) = (A + C) (B + C') (B' + C)



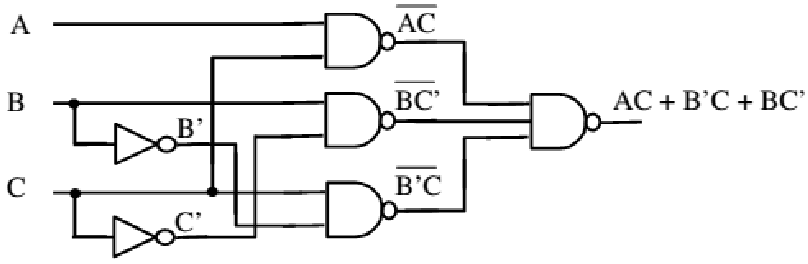
NAND-NAND

Buscamos grupos de variables con la forma de salida de una puerta NAND.

Ejemplo 1: $F(A,B,C) = AC + B'C + BC'$

Negamos 2 veces: $\overline{\overline{F(A,B,C)}} = \overline{\overline{AC + B'C + BC'}}$

Aplicamos De Morgan: $F(A,B,C) = \overline{\overline{AC} \cdot \overline{B'C} \cdot \overline{BC'}}$



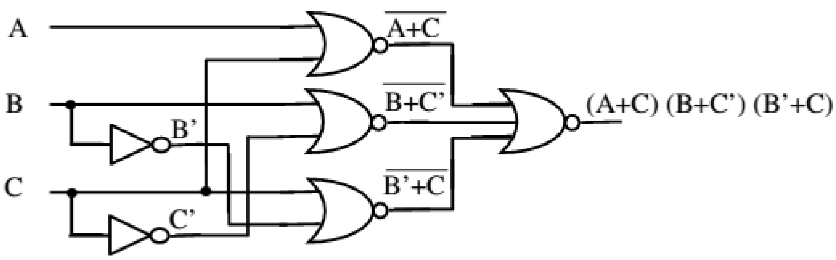
NOR-NOR

Buscamos grupos de variables con la forma de salida de una puerta NOR.

Ejemplo 2: $F(A,B,C) = (A + C)(B + C')(B' + C)$

Negamos 2 veces: $\overline{\overline{F(A,B,C)}} = \overline{\overline{(A+C)(B+C')(B'+C)}}$

Aplicamos De Morgan: $F(A,B,C) = \overline{\overline{(A+C)} + \overline{(B'+C)} + \overline{(B+C')}}$



4. ENLACES WEB

http://es.wikipedia.org/wiki/Algebra_booleana